Introduzione al concetto di funzione in un primo anno di scuola secondaria

Sommario
In questo lavoro si propongono alcune attività volte a introdurre il concetto di funzione a partire dai primi giorni del primo anno di scuola secondaria.
Nella prima parte si presentano alcune riflessioni relative ad aspetti storico – epistemologici, tecnici e cognitivi relativi al concetto di funzione. Nella seconda parte si descrivono alcune attività realizzate in classe con l'ausilio delle calcolatrici tascabili grafico – simboliche e dei sensori di movimento. Nelle conclusioni, infine, si propone una breve riflessione sulle potenzialità offerte dall'uso delle calcolatrici grafico - simboliche e, più in generale, dei CAS nel processo di acquisizione di concetti matematici come, per esempio, quello di funzione.

Summary
In this paper I describe some teaching – learning activities which aim at introducing the concept of function in a first year of high school classes.
The first part of the paper proposes some considerations about epistemological, historycal and cognitive aspects which concern the concept of function. The second part describes some classroom's activities with the aid of graphic – symbolic calculator and of motion sensor. The conclusions present some ideas which concern the use of CAS (Computer Algebra Systems) in teaching - learning mathematical concepts, the concept of function particularly.

Domingo Paola

Introduzione al concetto di funzione in un primo anno di scuola secondaria

Domingo Paola[1]
Liceo scientifico "A. Issel" Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di matematica Università di Genova

Introduzione

Quando si progetta un'attività didattica volta all'acquisizione di un determinato concetto e delle pratiche a esso relative, è necessario prestare attenzione sia agli aspetti disciplinari di carattere strettamente tecnico, sia agli aspetti storico epistemologici, sia agli aspetti di carattere cognitivo e didattico. I diversi punti di vista non possono essere separati e indipendenti fra loro; inoltre chi progetta dovrebbe avere la sensibilità di guardare alle differenti prospettive con l'occhio dell'insegnante consapevole della realtà che ha in classe[2] .

In questo articolo descrivo un ambiente di apprendimento volto a creare condizioni favorevoli alla costruzione di significati per il concetto di funzione in studenti di 14 – 15 anni che hanno frequentato il primo anno di un liceo scientifico (sperimentazione PNI).

Nella prima parte mi propongo di dare un'idea delle prospettive dalle quali ho affrontato gli aspetti tecnici, storico – epistemologici, cognitivi e didattici per costruire l'ambiente di apprendimento, volto all'introduzione del concetto di funzione nel quale, gli studenti ed io, abbiamo lavorato.

---

[1] E-mail domingo.paola@tin.it

[2] Con realtà della classe intendo le risorse umane, di tempo e tecnologiche disponibili, ma anche l'attenzione con la quale il progetto di sperimentazione viene seguito dalle diverse componenti scolastiche ed extra – scolastiche.

Nella seconda parte descrivo alcune attività realizzate in classe, soffermandomi su quelle che prevedono l'uso di strumenti informatici, in particolare delle calcolatrici tascabili grafico – simboliche. Questa scelta è motivata da un crescente interesse (non solo personale, mi pare) per lo studio delle potenzialità di questi strumenti nell'insegnamento – apprendimento della matematica. Nella terza parte propongo una breve riflessione sulle potenzialità offerte, dall'uso delle calcolatrici grafico – simboliche e, in generale dei CAS (Computer Algebra System), nel processo di acquisizione di concetti matematici come, per esempio, quello di funzione.

Aspetti storico – epistemologici, tecnici e cognitivi relativi al concetto di funzione

L'interesse per i problemi relativi al moto dei corpi è stata una costante delle ricerche scientifiche, in tutta la storia dell'umanità e, in particolare, fu al centro delle ricerche nel XVII secolo. Fra le ragioni che giustificano tale interesse, cito le seguenti (Kline, 1991):

- il problema di migliorare la determinazione e il calcolo delle posizioni dei pianeti nel loro moto attorno al Sole.
- la necessità di determinare con più accuratezza la latitudine e, soprattutto, la longitudine, problema legato, all'epoca, anche a una migliore determinazione dell'orbita lunare
- il problema del moto dei proiettili: all'epoca, la gittata di un proiettile e la massima altezza che poteva raggiungere, in dipendenza dell'angolo di tiro e della velocità iniziale, erano questioni di fondamentale importanza che portavano a investimenti enormi da parte degli Stati
- la richiesta di misure più precise del tempo, conseguente alla necessità di misurare con maggior precisione i moti dei corpi.

Il concetto di funzione, come legge che esprime la variazione di una grandezza rispetto a un'altra (in genere il tempo), può essere

considerato come un emergente da pratiche matematiche volte alla risoluzione dei problemi sopra ricordati e, più in generale, al problema del moto dei corpi.
Già nelle pagine di Galileo si può trovare traccia di questo concetto, anche se in termini non espliciti, in quanto Galileo parla più genericamente di relazioni tra grandezze. Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, per esempio, scrive: " […] per esperienze ben cento volte replicate sempre s'incontrava, gli spazii passati esser tra di loro come i quadrati dei tempi, e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale nel quale si faceva scendere la palla […]" (dai *Discorsi* in *Opere*, VIII, pp. 212 – 213, cit. in Rossi, 1969, pag. 185).
Come viene precisato in Kline (Kline, 1991), ancora prima che il concetto di funzione venisse esplicitato, i matematici erano soliti tabulare valori di curve, anche con precisione relativamente elevata; inoltre, sia le curve già conosciute e studiate, sia quelle di più recente attenzione, venivano spesso introdotte, nel XVII secolo, mediante moti di corpi. In realtà già gli antichi Greci pensarono alcune curve come generate da moti, ma si trattava di esempi isolati e, in un certo senso, non appartenenti a tutti gli effetti al mondo della matematica vera e propria. Nel XVII secolo, invece, le cose si presentavano in termini assai differenti: per esempio Galileo considerava la parabola come luogo geometrico descritto da un punto in movimento; Padre Mersenne definì la già nota cicloide come il luogo geometrico descritto da un punto di una ruota che rotola sul terreno. Insomma, a partire dal XVII secolo, il concetto di curva come luogo geometrico descritto da un punto in movimento continuo diventa esplicito e comune alla pratica dei matematici. In particolare, nel *Tractatus de quadratura curvarum*, Newton scrive: "Io considero qui le quantità matematiche non come costituite da parti molto piccole, ma descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e quindi generate, non dalla giustapposizione delle loro parti, ma dal moto continuo dei punti … questa genesi ha effettivamente luogo nella natura delle cose e può

essere vista quotidianamente nel moto dei corpi" (cit. in Kline, 1991, p. 396).

Le origini del *Calcolo* sono caratterizzate da un forte riferimento alla fisica, al moto dei corpi. Questa concezione fisica delle grandezze matematiche e il riferimento al movimento caratterizzano sicuramente l'opera newtoniana, nella quale vengono utilizzate metafore assai suggestive e ricche di significato, che rimandano a un mondo dinamico, difficilmente dominabile dalla matematica classica e, in particolare, dal semplice ricorso alla geometria euclidea.

La definizione, che ancora oggi si assume del concetto di funzione, data nel linguaggio degli insiemi, è qualcosa di molto lontano dalle idee che stanno alle origini del *Calcolo*: essa può essere vista come uno dei prodotti di quel lungo processo che, iniziato con l'esigenza di rendere più rigorosa la matematica e, in particolare l'analisi matematica, ha poi portato a una riflessione sui fondamenti della disciplina, trovando nella teoria degli insiemi un linguaggio adeguato a parlare degli oggetti matematici. Può essere utile ricordare che, ancora nel 1837, il matematico tedesco Dirichlet dava una definizione di funzione continua in cui metafore legate al movimento non erano del tutto scomparse: "siano a e b due valori fissati e x una variabile che assume tutti i valori compresi fra a e b. A ciascun x corrisponde un unico y in modo tale che, mentre x percorre con continuità l'intervallo tra a e b, anche $y = f(x)$ a poco a poco si modifica; questo significa che y è una funzione continua" (cit. in Nucleo di Ricerca Didattica di Modena, 1985, pag. 49).

Il movimento e la dinamicità scompaiono completamente nella definizione di funzione che fa uso del linguaggio degli insiemi, nella quale si considera la funzione f da A in B come un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ tale che:

1. per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$
2. se $(a, b) \in f$ e $(a, b') \in f$, allora $b = b'$

La prima condizione garantisce che la funzione è definita per ogni elemento del dominio; la seconda che a ogni elemento del dominio corrisponde un solo elemento del codominio.
Come già accennato in precedenza, la storia suggerisce che la definizione di funzione data nel linguaggio insiemistico è il risultato di una lunga evoluzione di cui il movimento e la dinamicità sono stati non solo i punti di partenza, ma anche le caratteristiche salienti per tanto, tanto tempo. Richiedere a studenti di un biennio di scuola secondaria di partire dalla definizione data nel linguaggio insiemistico potrebbe essere azzardato: forse i molti problemi noti nella letteratura specifica relativamente all'acquisizione del concetto di funzione potrebbero dipendere da questa possibile inopportunità didattica. Tra l'altro la situazione relativa all'insegnamento – apprendimento del concetto di funzione è piuttosto paradossale: da una parte se ne riconosce l'importanza e l'aspetto fondante per la matematica; dall'altra, pur introducendo il concetto con il linguaggio insiemistico già nel primo anno di corso, con le funzioni si inizia a lavorare in modo sistematico solo nel quarto o quinto anno, con l'introduzione dell'analisi.
Innanzitutto è bene chiarire che l'approccio al concetto di funzione con l'uso del linguaggio degli insiemi non è l'unico possibile. Vorrei qui accennare a quelli che ritengo essere i possibili approcci al concetto di funzione elencandoli dal più statico al più dinamico[3]:

1. funzione come particolare sottoinsieme di un prodotto cartesiano. Le rappresentazioni più utilizzate per tale approccio sono i diagrammi a frecce, le tabelle lette riga per riga, i grafici pensati come insiemi di punti del piano cartesiano;

[3] L'ordine scelto ha, a mio avviso, una stretta corrispondenza rispetto all'efficacia dell'approccio per studenti in giovane età e con poche esperienze matematiche, come risultano essere gli studenti di un primo biennio di scuola secondaria.

2. funzione come scatola nera, ossia come macchina input – output che agendo su uno o più ingressi genera una e una sola uscita;
3. funzione come espressione variabile: si tratta di un approccio molto simile a quello di Newton, che pensava a grandezze variabili in funzione del tempo. Questo punto di vista porta a privilegiare, nella lettura di una funzione tabulata, i valori delle ordinate (della variabile dipendente); in altri termini la tabella viene letta in colonna (quella della variabile dipendente), perché sono le variazioni della variabile dipendente che danno un'idea delle caratteristiche della funzione. La variabile indipendente, infatti, può essere fatta variare a piacere nel dominio della funzione e non dà quindi informazioni significative (si può immaginare che essa vari con un passo costante; fissata questa informazione, di essa ci si può anche dimenticare). È anche possibile, però, utilizzare un approccio ancora più dinamico educando gli studenti a prestare attenzione alla variazione delle variazioni della variabile dipendente; in altri termini, si studiano le variazioni delle differenze della colonna delle y. Sembra che gli studenti siano particolarmente sensibili alle variazioni delle differenze, nel senso che, scorrendo la colonna delle y in una tabella, identificano un cambiamento significativo quando varia la successione delle differenze dei valori della variabile dipendente. Naturalmente, in tale approccio è opportuno fare ampio uso dei grafici, pensandoli, però, non come insiemi dati di coppie di punti del piano cartesiano, ma come tracce di un punto in movimento.

Come si vede, siamo di fronte a differenti possibilità, per l'approccio al concetto di funzione, suggerite dalla storia e dal sapere istituzionale di riferimento; ma quali altre indicazioni e quali altri suggerimenti danno, eventualmente, le ricerche nel campo

delle scienze cognitive per risolvere il problema legato alle difficoltà di insegnamento – apprendimento di tale concetto?
Sembra che il terzo degli approcci sopra elencati sia molto vicino al modo in cui il nostro sistema senso-motorio codifica le sensazioni fisiche: esso è comunque sensibile alle variazioni e, in particolare, alle variazioni seconde (Berthoz, 1998). Ciò suggerisce che il terzo degli approcci sopra elencati sia in forte coerenza con quelle che vengono indicate come "teorie dell'embodiment", che affermano che ogni conoscenza, anche quella più astratta, è largamente metaforica e che le metafore utilizzate sono quelle che possono essere fatte risalire all'esperienza sensibile, alle percezioni del nostro apparato senso-motorio (Nunez, R.; Edwards, L. & Matos, J.F.: 1999; Lakhoff, G. & Nunez, R.: 2000; Nunez, 2000; Tall, 2002[4]). L'ipotesi, in effetti, è che l'approccio 3 sia esso stesso in qualche modo embodied (situato, incorporato) e che, per tale motivo, se favorito e non inibito, possa consentire rivelarsi naturale e ricco di significato per gli studenti[5].
Concludo questa prima parte precisando le caratteristiche principali dell'ambiente di apprendimento che ho cercato di costruire per un approccio al concetto di funzione in un primo anno di liceo scientifico corso sperimentale PNI. Tale ambiente è fondato:

- su un approccio dinamico al concetto di funzione, ispirato alla concezione newtoniana di grandezze che variano nel tempo e che presta particolare attenzione allo studio delle variazioni prime e seconde della variabile dipendente

---

[4] Gli articoli di David Tall sono disponibili in linea al sito http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/)

[5] Per un approfondimento di tali aspetti e per una raffinata analisi dei comportamenti degli studenti in ambienti che fanno uso di sensori di movimento e di CAS si vedano anche i lavori del nucleo di ricerca didattica di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello, per esempio (Arzarello & Robutti, 2001; Ferrara & Robutti, 2001; Bazzini, Ferrara, Fossati & Robutti, in stampa)

- sulla messa in evidenza del ruolo delle funzioni come particolari modelli matematici di situazioni oggetto di studio;
- sull'uso dei sistemi di manipolazione grafico – simbolica, in particolare delle calcolatrici tascabili grafico – simboliche e sull'uso dei sensori di movimento come mediatori nel processo di insegnamento - apprendimento, in quanto strumenti che incorporano il sapere istituzionale relativo al concetto di funzione e lo mettono a disposizione dello studente, consentendo di evidenziare quegli aspetti dinamici che, secondo le ipotesi fatte, dovrebbero risultare particolarmente adatti a introdurre il concetto di funzione a studenti di un primo biennio di scuola secondaria[6]

Alcune attività svolte in classe

Presento alcune attività realizzate in classe, nell'ambiente di insegnamento – apprendimento sopra descritto. In particolare, parlerò di:

1. uso dei sensori di movimento
2. definizione del concetto di pendenza di un segmento

[6] In realtà vi sono altri due aspetti che caratterizzano, in generale, l'ambiente di apprendimento e sui quali ora non mi soffermo:

- l'attenzione alle dinamiche di interazione sociale, in particolare a quelle che caratterizzano i lavori in piccoli gruppi collaborativi e la condivisione delle conoscenze e delle strategie di approccio ai problemi nelle discussioni collettive orchestrate dall'insegnante (Bartolini Bussi & al, 1995);
- l'attenzione agli aspetti affettivo – emozionali, con l'obiettivo di creare un ambiente di apprendimento privo di tensioni non strettamente necessarie e di portare gli studenti a una valutazione serena e consapevole di successi e insuccessi, evitando di cadere nell'attribuzione, degli uni e degli altri, a cause non controllabili (come, per esempio, la "sfortuna", il "non essere portati per la matematica", "l'accanimento gratuito dell'insegnante nei confronti dello studente").

3. definizione e studio, con la calcolatrice grafica, di alcune funzioni che descrivono l'evoluzione di un fenomeno nel tempo.

Primo esempio di attività: i sensori di movimento

Le attività relative all'uso dei sensori di movimento sono state proposte anche a studenti di un terzo anno di scuola media, come ho descritto in altri lavori (Paola, 2001; Paola 2002). Rimando a tali lavori, in particolare al secondo, per precisazioni e approfondimenti; qui mi limito a richiamare brevemente le varie attività proposte e a discuterne il significato nel particolare ambiente di insegnamento – apprendimento sopra descritto.

Dopo aver suddiviso gli studenti in gruppi composti da tre alunni sono state effettuate, nell'ordine, le seguenti attività (Paola, 2001, pp. 87 – 88):

1. a turno ciascun coordinatore di ogni gruppo si è mosso rispetto al sensore, osservando la traccia del proprio movimento proiettata su un muro dell'aula grazie a un view screen posto su una lavagna luminosa e collegato alla calcolatrice. La consegna prevedeva che anche gli altri studenti osservassero attentamente, dal proprio banco, il movimento dei coordinatori e la traccia descritta sul muro dell'aula.[7]
2. Gli studenti si sono riuniti nei gruppi di lavoro per riflettere e discutere su quanto avevano fatto o visto fare. La consegna era quella iniziare ad avanzare ipotesi (o di confrontare quelle eventualmente già pensate individualmente durante la precedente attività) sul come e perché il movimento era legato al grafico osservato sul muro.

[7] Gli studenti che hanno osservato dal banco, dovrebbero essere stati messi in condizioni cognitive simili a quelle degli studenti che hanno effettivamente eseguito i movimenti.

3. A turno tutti gli alunni che nella prima attività si erano limitati semplicemente a osservare il movimento dei coordinatori dei gruppi di lavoro, sono stati chiamati a compiere essi stessi il movimento. Inizialmente, però, il sensore non è stato messo in funzione: la consegna prevedeva che i compagni di gruppo (eventualmente anche di altri gruppi) disegnassero un grafico tempo-posizione. Subito dopo, lo stesso movimento prima eseguito, veniva riprodotto con il sensore in funzione, in modo che i compagni di gruppo (e altri studenti che eventualmente avessero voluto provare a rispondere alla consegna) potessero confrontare la traccia ora disegnata sul muro con il grafico tempo-posizione prima prodotto.
4. Gli studenti si sono nuovamente riuniti in gruppi di lavoro per rispondere a domande specifiche riguardanti l'interpretazione di alcune caratteristiche grafiche delle tracce osservate sul muro (per esempio dovevano spiegare che cosa suggerisce un segmento orizzontale, uno obliquo, oppure un tratto di curva e così via…)
5. A turno i coordinatori di ciascun gruppo sono stati invitati a muoversi, con il sensore in funzione e con la traccia proiettata alle loro spalle, in modo tale che essi, al contrario dei compagni, non potessero osservare la traccia prodotta dal proprio movimento. Al tempo stesso, i coordinatori dovevano descrivere verbalmente i propri movimenti e le caratteristiche significative della traccia proiettata sul muro (visibile a tutti gli altri studenti). I compagni di gruppo dovevano prendere nota di eventuali errori commessi dal coordinatore per poi discuterne al termine dell'esperienza.
6. A turno tutti gli studenti dovevano cercare di riprodurre, con il proprio movimento, un grafico tempo-posizione generato dalla calcolatrice.
7. A turno ciascun coordinatore si è mosso e i compagni di gruppo hanno riportato, sul proprio quaderno, la traccia

> proiettata sul muro durante il movimento del coordinatore. Al termine del movimento, il coordinatore, utilizzando una specifica funzione fornita dalla calcolatrice, ha rilevato un certo numero di coppie di dati "tempo-posizione". Gli studenti hanno elaborato a casa i dati e li hanno discussi nella successiva lezione.

L'obiettivo specifico che mi ha spinto a proporre tali attività è stato principalmente quello di cercare di associare la variazione di una funzione e la variazione locale di pendenza di un grafico ad aspetti fortemente percettivi come la variazione della propria posizione e della propria velocità nel tempo[8].
Gli studenti hanno imparato gradualmente ad associare a una velocità quasi costante (non è possibile muoversi realmente a velocità costante, in quanto almeno a ogni passo si ha una variazione di velocità) un grafico vicino a un segmento (ovviamente in un sistema di riferimento "tempo – posizione"); analogamente, hanno associato a una curva crescente con la concavità rivolta verso l'alto il movimento di un corpo che si allontana dal sensore con accelerazione positiva, mentre hanno associato a una curva crescente con la concavità rivolta verso il basso il movimento di un corpo che si allontana dal sensore diminuendo la velocità. L'idea che inizia a formarsi, con attività di

[8] Preciso che non sto affermando in alcun modo che concetti cinematici come quelli di velocità e accelerazione sono embodied: velocità e accelerazione sono oggetti teorici astratti. Quando parlo di aspetti fortemente percettivi mi sto riferendo all'esperienza coordinata del proprio movimento (variazione della posizione e della velocità) e del grafico che, grazie al sensore di movimento e alla calcolatrice, viene tracciato sul view screen e proiettato sul muro. È comunque bene precisare che non tutti i ricercatori concordano con questa posizione; per esempio David Tall (Tall, 2002) suggerisce di lavorare soprattutto sugli aspetti esclusivamente matematici, come la variazione locale della pendenza di un grafico e di fondare su tali aspetti l'approccio embodied, rimandando a un secondo momento considerazioni in qualche modo legate alla variazione di grandezze fisiche.

questo tipo, è che una pendenza costante, in un sistema di riferimento "tempo – posizione", indica che il corpo si sta muovendo con velocità costante; ho notato che ciò che aiuta il formarsi di questa idea è, in particolare, la constatazione che un segmento orizzontale (di pendenza nulla) indica che il corpo è fermo. Il passo successivo, quello di approssimare localmente una curva, che rappresenta l'equazione oraria della posizione, con un segmento e di considerare la pendenza del segmento come informazione sul valore della velocità del corpo, è compiuto in modo assai naturale dagli studenti. Si tratta, inizialmente e per un tempo non breve, di un'associazione effettuata a livello informale: gli studenti valutano a occhio la pendenza di un segmento. Sono in grado di ordinare differenti pendenze, ma quasi mai di calcolarle (solo alcuni studenti associano la formula $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, magari vista nella scuola media, con la pendenza di un segmento). La nozione di pendenza locale di un grafico[9] viene quindi introdotta a livello del tutto informale, fondandola su aspetti fortemente percettivi e proprio per questo può diventare una *radice cognitiva*[10], nel senso di Tall (Tall, 2000).

[9] Il concetto informale di "pendenza locale di un grafico" richiama la proprietà di microlinearità, ossia quella proprietà goduta da certe funzioni, nell'intorno di alcuni loro punti. Informalmente, una funzione f gode della proprietà di microlinearità nell'intorno di un punto x_0 del suo dominio se ingrandendo sempre più il suo grafico intorno al punto $P(x_0, f(x_0))$, tale grafico tende a diventare una retta. Ovviamente tale nozione è strettamente legata alla nozione di derivabilità di una funzione in un punto.

[10]Secondo Tall, "A cognitive root is a concept that:
(i) is a meaningful cognitive unit of core knowledge for the student at the beginning of the learning sequence,
(ii) allows initial development through a strategy of cognitive expansion rather than significant cognitive reconstruction,
(iii) contains the possibility of long-term meaning in later developments,
(iv) is robust enough to remain useful as more sophisticated understanding develops"
(confrontare il sito precedentemente citato alla voce "cognitive root").

Gli studenti hanno dimostrato di riuscire a trasferire queste idee in situazioni tipicamente matematiche: per esempio, sono riusciti a vedere, dietro l'equazione di una retta e, più in generale, di una funzione, un corpo in movimento. In particolare, nell'equazione $y = 3x + 2$ gli studenti hanno visto un corpo che parte dalla posizione 2 (per esempio 2 metri) e si muove con velocità 3 (per esempio 3 m/s).
Un tale approccio consente di associare significati fisici a espressioni del tipo $3x+2 > x +10$. Una studentessa, Irene, ha così interpretato la disequazione sopra scritta:
"inizialmente $x + 10$ si trova in vantaggio, ma prima o poi $3x+2$ lo raggiunge perché ha una maggiore velocità".
È chiaro che il linguaggio non è formalmente elegante, né rigoroso, ma quanto significato in queste parole, quante idee ed immagini ricche di significato, che fanno capire che esiste una soluzione e che quindi spingono alla sua ricerca!
Naturalmente attività di questo tipo non sono sufficienti a garantire che la nozione di pendenza di un segmento si leghi a tutti gli effetti alla delicata e importante nozione di "pendenza di una funzione in un punto"; è intanto necessario affrontare il problema di definire formalmente la pendenza di un segmento (vedere più avanti) e far effettuare agli studenti attività di calcolo approssimato della pendenza locale di funzioni di cui sia nota un'espressione analitica o, come è stato fatto nel caso delle attività con i sensori, calcolare rapporti $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, con intervalli di tempo sempre più piccoli, tabulando i dati (t, s) rilevabili sulla traccia dell'equazione oraria.
Circa due mesi dopo queste prime attività, sono state svolte altre attività sempre con l'uso dei sensori. Innanzitutto sono state ripetute le attività 5 e 6 sopra descritte, per consentire agli studenti di rinfrescare l'esperienza. In seguito è stato chiesto agli studenti di tracciare un grafico velocità – tempo relativo a un determinato grafico posizione – tempo. Gli studenti dovevano anche produrre congetture sulle seguenti questioni:

- che cosa accade alla velocità avvicinandosi o allontanandosi dal sensore?
- È possibile partire con velocità diverse da 0?
- È possibile riprodurre, con il proprio movimento, un grafico tempo – posizione che presenti punti angolosi come quelli dei grafici generati dalla calcolatrice?[11]

Naturalmente era consentito utilizzare il sistema sensore – calcolatrice per testare le ipotesi effettuate (inizialmente era stato spiegato che la calcolatrice può disegnare un grafico velocità – tempo relativo a un grafico posizione – tempo e come ottenere tale grafico). Nonostante ciò gli studenti non hanno fatto un uso costante e sistematico della calcolatrice per verificare l'attendibilità delle congetture via via formulate. In genere preferivano cercare di sostenere le congetture formulate con argomentazioni spesso difficili da seguire oppure, in mancanza di argomentazioni, preferivano cambiare localmente le ipotesi fatte, anche di poco, in modo da sottrarle alle critiche dei compagni. In particolare, di fronte alla presenza di valori negativi della velocità nel grafico tracciato dalla calcolatrice, gli studenti hanno formulato varie ipotesi tese a spiegare "l'errore della calcolatrice", senza mai curarsi di testarne la coerenza e la plausibilità. Solo i miei interventi e i ripetuti inviti a testare la correttezza delle congetture prodotte e la plausibilità delle ipotesi formulate, sono riusciti a suscitare in alcuni studenti un atteggiamento più rispettoso dei risultati sperimentali che li ha poi portati a dare un significato ai valori negativi della velocità. La discussione collettiva è stata videoregistrata, proiettata e commentata, come esempio di atteggiamento poco corretto di fronte ai risultati sperimentali[12].

---

[11] È possibile far generare alla calcolatrice grafici che sono "spezzate", ossia giustapposizioni di segmenti: i punti angolosi di cui si parla sono i punti di raccordo di tali segmenti.

[12] Sull'uso delle videoregistrazioni in classe come strumento per costruire un'esperienza comune e condivisa, si veda (Furinghetti, Olivero & Paola, 2000)

Secondo esempio: la definizione della funzione "pendenza"

Le attività con i sensori di movimento hanno consentito di associare al concetto di "pendenza locale di un grafico" quello di velocità, o se si vuole, in senso più generale, di velocità di variazione della variabile dipendente rispetto alla variabile indipendente. Per gli studenti diventa quindi naturale associare alla pendenza informazioni significative su come varia una grandezza: ciò vuol dire che, implicitamente e inevitabilmente, inizia a diventare oggetto di attenzione anche la variazione della pendenza.

Per tale motivo e anche per il fatto che la pendenza di un segmento non era ancora stata definita formalmente ed esplicitamente (solo alcuni studenti, come ho detto, mi erano sembrati in grado di riconoscere senza problemi nel rapporto $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ la pendenza del segmento di estremi (x_1, y_1) e (x_2, y_2)), ho pensato di costruire una scheda di lavoro specifica sul concetto di pendenza di un segmento, utilizzando la calcolatrice programmabile per far definire formalmente, agli studenti, la funzione "pendenza di un segmento".

La calcolatrice è molto utile, perché consente di esplicitare in modo molto chiaro la visione della funzione come macchina con uno o più ingressi e un'uscita. In tal caso, per la funzione pendenza, le variabili di ingresso sono punti e quella di uscita è un numero reale. Ciò non è banale, in quanto si tratta non solo di utilizzare un linguaggio rigoroso e una sintassi precisa, ma soprattutto perché la funzione "pendenza di un segmento" è una funzione di più variabili (due coppie ordinate di numeri reali in ingresso). La calcolatrice consente, al tempo stesso, di esplicitare questa "non banalità" e di renderla gestibile per lo studente.

Il primo passo è quello di discutere come rappresentare i punti nella calcolatrice; quali sono le strutture dati di cui la calcolatrice dispone e che sono adatte a rappresentare un punto? Per rispondere è intanto utile far capire agli studenti che cosa è un punto per la

calcolatrice nell'ambiente di programmazione[13]: non una traccia lasciata da una matita sul foglio, ma una coppia di numeri, una coppia ordinata di numeri reali. Nella calcolatrice esistono le liste, che sono elenchi ordinati di dati. Proprio quello che si voleva. Per comunicare una lista alla calcolatrice è sufficiente scrivere lettere separate da una virgola, racchiudendo l'elenco fra due parentesi graffe. Per esempio, la lista {x,y} è una coppia ordinata di due elementi e, quindi, può rappresentare, nel piano cartesiano, il punto di coordinate x e y.
E che cosa dovrà fare, con i due punti in input, la funzione "pendenza di un segmento"? Dopo l'attività iniziale proposta nella scheda di lavoro, ormai tutti i ragazzi sanno che la pendenza di un segmento è data dal rapporto tra quanto ci si è spostati in altezza e quanto in orizzontale (si tratta di cose non scontate, visto che inizialmente molti studenti avevano difficoltà a capire che cosa vuol dire pendenza del 100% e, soprattutto, che non si può associare a una pendenza del 100% un segmento verticale[14]).
Si tratta quindi di fornire alla calcolatrice le istruzioni per calcolare la pendenza di un segmento di cui siano dati gli estremi.
Ecco la definizione di una funzione "pendenza di un segmento" per una calcolatrice TI – 89:

```
: Pend(c,d)
: FUNC
```

---

[13] Uno degli aspetti interessanti nell'uso delle calcolatrici è che i differenti ambienti di lavoro che mettono a disposizione dell'utente forniscono differenti rappresentazioni degli oggetti matematici: per esempio, un punto è una coppia ordinata di numeri reali nell'ambiente di "input dati" o di "editor programmi", ma diventa un pixel nell'ambiente grafico. Avere a disposizione, in uno stesso strumento, differenti possibilità di rappresentare uno stesso oggetto dovrebbe consentire di assegnare sempre più significato all'oggetto rappresentato.

[14] Se si riflette sul fatto che un concetto così importante e fondamentale come quello di pendenza produce fraintendimenti così forti, non ci si può poi stupire delle difficoltà che gli studenti incontrano nella comprensione di concetti assai più delicati che si fondano su quello di pendenza.

: (d[2] – c[2])/(d[1] – c[1])
: EndFunc

La funzione, di nome Pend, dipende da due parametri, che sono due punti, ossia due liste, indicati con le lettere *c* e *d*; essa fornisce, mediante il calcolo del rapporto fra la differenza delle ordinate dei due punti e la differenza delle loro ascisse, il valore della pendenza di un segmento di estremi dati.
Per esempio, se nella calcolatrice si immettono le due liste *a* e *b*, mediante le istruzioni
{1, 2} → a
{2, 3} → b
e poi si digita
pend (a, b)
la calcolatrice richiama la funzione "pend" che restituisce come valore 1, ossia la pendenza del segmento di estremi *a* e *b*. Ovviamente, se il punto *b* avesse la stessa ascissa del punto *a*, per esempio, se si definisse
{1, 2} → a
{1, 3} → b
digitando pend(a, b) la calcolatrice restituirebbe la risposta "undef", che suggerisce che, in tal caso, non è possibile definire la pendenza del segmento di estremi *a* e *b*.
L'uso della calcolatrice per definire la funzione "pendenza di un segmento" ha, a mio avviso, un'importanza strategica: infatti richiede l'uso di una sintassi rigida, di un linguaggio preciso e non ambiguo. Tra l'altro la richiesta è accettata di buon grado dagli studenti, che si rendono conto di dover comunicare con un mezzo poco flessibile e, sicuramente, non intelligente[15]. Si tratta, quindi,

[15] In genere la richiesta di rigore e precisione nel linguaggio non è compresa né ben vista dagli studenti, quando è avanzata nel corso di un colloquio con l'insegnante o con altri compagni: costoro, infatti, hanno tutti gli strumenti e le competenze per comprendere anche un linguaggio non del tutto rigoroso e

di un primo passo, motivato e accettato in modo quasi naturale dagli studenti, verso quegli aspetti formali che caratterizzano il passaggio dalla matematica elementare a quella avanzata e che non possono essere trascurati in una preparazione matematica forte e completa. Tra l'altro, proprio la naturalezza con la quale gli studenti accettano l'esigenza del formale e imparano a trattare con oggetti non banali come, in tal caso, una funzione a più variabili, danno un'idea delle potenzialità dell'uso di strumenti come le calcolatrici programmabili grafico – simboliche nella didattica della matematica.

Terzo esempio di attività: un modello per l'evoluzione di una grandezza

Agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi di tre componenti[16] è stato posto il seguente problema[17]:

Una studentessa si è prodotta una distorsione al ginocchio durante una partita di pallavolo indoor e il suo dottore le ha prescritto un farmaco antinfiammatorio per ridurre il gonfiore. Deve prendere due pastiglie da 220 mg ogni 8 ore per 10 giorni. Il suo rene filtra il 60% di questo farmaco dal suo corpo ogni 8 ore. Quanta medicina c'è nel suo organismo dopo 3 giorni? E dopo 4 giorni? E

---

preciso. Nel caso della comunicazione con il calcolatore essa acquista significato anche per gli studenti più diffidenti nei confronti del formalismo.

[16] In questi gruppi ciascuno studente ha un ruolo ben preciso: uno di essi si assume il compito di controllare che il gruppo stia lavorando al compito che è stato proposto (orientato al compito); un altro componente cerca di attivare le strategie adeguate a far sì che tutti gli studenti del gruppo lavorino serenamente e collaborino al prodotto finale (orientato al gruppo); il terzo componente si occupa di trascrivere le discussioni sorte all'interno del gruppo, le strategie proposte ed eventualmente abbandonate, il prodotto finale (memoria del gruppo). I tre ruoli variano in genere ogni dieci - quindici giorni.

[17] Il problema è stato tratto dagli NCTM americani, anche se la formulazione è stata leggermente estesa. Può essere utile confrontare testo e soluzioni all'indirizzo
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.2/index.htm#applet

dopo 10 giorni? Cercate di studiare l'evoluzione del farmaco nel tempo; in particolare, cercate di capire che cosa accadrebbe se la studentessa continuasse a prendere il farmaco per molto tempo: pensate che la presenza del farmaco nel suo organismo tenderebbe prima o poi a diminuire o aumenterebbe sempre? E, nel caso aumentasse sempre, pensate che potrebbe superare un qualunque valore prefissato, oppure tenderebbe a un valore che non è superabile nemmeno lasciando passare molto tempo? Come evolve la presenza del farmaco se, dopo dieci giorni, la studentessa non lo assume più? Quanto tempo impiega a ridursi a 1/100 del farmaco presente dopo dieci giorni?
Suggerimenti
Provate a costruire una tabella del tipo

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ = farmaco che rimane in mg.
0	1	0	
1	1	8	
2	1	16	
3	2	24	
…	…	…	
n			

Ricordate che organizzare i dati in modo intelligente aiuta ... per esempio a definire una funzione che rappresenti l'andamento della presenza del farmaco nell'organismo della studentessa…
Riprendete in considerazione le varie domande che vi sono state poste nel testo del problema ... ovviamente, per rispondere, aiutatevi anche con la calcolatrice… ricordate eventuali problemi simili già svolti ...

Immagini, metafore e gesti prodotti dagli studenti nella fase di condivisione delle strategie risolutive sono stati assai interessanti: per esempio gli studenti hanno presto capito che, anche se la studentessa continuasse a prendere le pillole,

“il farmaco tenderebbe a stabilizzarsi, perché anche se aumenta di 440, il suo rene filtra il 60% che è sempre maggiore… è come se diamo delle palate di sabbia e dal mucchio, sempre più grande, leviamo sempre il 60%, ossia una quantità sempre più grande…prima o poi quello che aggiungo è uguale a quello che levo e il processo si stabilizza” (Michele)
Oppure:
“la concentrazione del farmaco cresce sempre, ma sempre meno, ossia, la pendenza diminuisce” (Beatrice)
Fino a che gli studenti lavorano a livello informale, non hanno difficoltà a prevedere l’evoluzione del farmaco nell’organismo: le metafore che utilizzano indicano un controllo sorprendente del fenomeno. Le difficoltà nascono, invece, quando cercano di tradurre in termini formali la proposizione (a cui tutti, in un modo o nell’altro sono arrivati):
“parte da 440 e poi filtra il 60%, quindi abbiamo 440 + il 40% di 440 e poi il 40% di questo più 440 e così via…”
e solo un mio intervento, nel quale invito a scrivere:

$F(0) = 440$

$F(1) = 0.4\ F(0) +440$

$F(2) = 0.4F(1) + 440$

…..

$F(n) = 0.4F(n-1)+ 440$

(con molta difficoltà nella comprensione dell’ultima riga), porta alla risoluzione del problema.
Una prima riflessione potrebbe portare a supporre che la difficoltà sia determinata dal passaggio da una variabile continua a una discreta; in realtà non penso che questa sia la causa delle notevoli difficoltà incontrate dagli studenti. La tabulazione dei dati ogni otto ore è vista, a mio avviso, come un campionamento, una rilevazione di dati di una grandezza che varia con continuità. Le difficoltà nascono invece proprio con il processo di formalizzazione, che rende statico un fenomeno intrinsecamente dinamico. Si tratta di una selezione di istantanee da un processo dinamico che sembra far

perdere molti di quei significati prima costruiti. Se queste considerazioni interpretano correttamente le difficoltà incontrate dagli studenti, allora bisognerebbe prestare molta più attenzione e cautela alle formalizzazioni precoci, spesso richieste nella prassi didattica.
Prima di passare alla definizione della funzione sulla calcolatrice, ho cercato di far capire come la calcolatrice esegue il calcolo e quante operazioni occorrono.
Quindi abbiamo definito la funzione farmaco(n) sulla calcolatrice (questa volta si tratta di una funzione definita per ricorrenza).

```
:Farmaco(n)
:Func
:If n = 0
:Return 440
:If n> 0
:Return 0.4*farmaco(n-1)+440
:EndFunc
```

La definizione di tale funzione semplifica la ricerca del valore limite. Ecco alcuni valori forniti dalla calcolatrice:
Farmaco (3) = 714.56
Farmaco (5) = 730.33
Farmaco (8) = 733.14
Farmaco (10) = 733.30
Farmaco (11) = 733.32
Farmaco (12) = 733.33
Farmaco (13) = 733.33

Per rispondere alla domanda
"che cosa accadrebbe alla concentrazione del farmaco nel sangue, nel caso in cui la studentessa smettesse di assumerlo?"
alcuni studenti scrivono

$G(0) = 733,33$
$G(1) = 0,4G(0)$
$G(2) = 0,4G(1)$
....
$G(n) = 0,4G(n-1)$

Nessuno si accorge che, in tal caso, è semplice trovare una forma chiusa
$G(n) = (0,4)^n \cdot 733,33$

Invece tutti capiscono subito che si tratta di una curva la cui pendenza è negativa e diminuisce in valore assoluto, anche se non raggiungerà mai lo 0.

Quello che ho notato è che gli studenti non hanno fatto fatica a utilizzare immagini fortemente dinamiche nello studio dell'evoluzione del fenomeno, ma non tutti sono riusciti, se non dopo molti sforzi e aiuti da parte mia, ad associare queste immagini alle formule della matematica. In altri termini, se si dice che una grandezza diminuisce ogni otto ore del 60% i ragazzi non fanno fatica a capire che la diminuzione non è lineare, ma che diminuisce essa stessa in quanto si applica il 60% a una grandezza sempre più piccola. Analogamente, anche se sono all'inizio del biennio, non hanno difficoltà a capire che la concentrazione di farmaco che rimane nel sangue può essere descritta dicendo che "il valore successivo si ottiene calcolando il 40% del valore precedente … e così via". Invece molti hanno dimostrato difficoltà a esprimere tutto ciò in formula: non solo hanno difficoltà a scrivere $x(n) = 0,4\,x(n-1)$ con $x(0)$ dato, ma talvolta non riescono a riconoscere, nella formula, la variazione coordinata tra la variabile x, che rappresenta il valore della grandezza e la variabile n, che rappresenta il numero d'ordine dell'intervallo di tempo considerato. In altri termini, quando passano alla formulazione matematica, la dinamicità scompare e, al posto di due grandezze che variano in modo coordinato, i ragazzi iniziano a pensare a una serie di valori statici, a una specie di tabella letta riga per riga, perdendo l'immagine della funzione da un punto di vista globale.

In seguito ho avviato una riflessione sulla complessità di calcolo richiesta per calcolare i valori della funzione G definita per ricorsione e quella richiesta per calcolare i valori di G nel caso della formula chiusa. Il guadagno di efficienza computazionale nel passaggio dal primo al secondo caso è stato compreso senza alcuna difficoltà. Questa riflessione ha fatto nascere la domanda se anche la funzione farmaco potesse essere definita con una formula chiusa. La comprensione della risposta (positiva) supera le attuali competenze degli studenti e così ho proposto di provare a scrivere un programma che calcoli i valori della funzione farmaco passo - passo, iterativamente, così come gli studenti hanno fatto quando hanno scritto alcuni valori nella tabella. Abbiamo quindi costruito il programma farm:

```
:farm()
:Prgm
:Request "dammi n", n
:expr(n) → n
:440 → far
:For i, 1, n
:0,4*far + 440 → far
:EndFor
:Disp far
:EndPrgm
```

Per rispondere alla domanda "quanto tempo impiega la concentrazione a ridursi a 1/100 del valore iniziale?", si deve risolvere l'equazione $7{,}33 = (0{,}4)^{n}\ 733{,}33$.

La soluzione si può trovare per tentativi o graficamente, ma essa, come spesso le risoluzioni grafiche, richiede cambi di scala, uso di finestre grafiche adeguate, capacità di osservazione e di fare previsioni, capacità di accorgersi di qualcosa che non era atteso e di spiegarsi perché. Tutto ciò porta, attraverso gli zoom a fare esperienza (inconsapevole) del concetto di microlinearità e quindi a far diventare definizione in atto quella di tangente come miglior approssimazione lineare di una funzione (linearizzabile) in un punto. Le calcolatrici forniscono, sotto questi aspetti potenzialità che la tecnica del gesso e della lavagna non consentono. In tal caso gli strumenti tecnologici sono veri e propri strumenti di pensiero, strumenti che potenziano le nostre capacità di rappresentazione, descrizione, previsione e che danno nuove e più potenti immagini degli oggetti matematici. Basti pensare che il grafico di una funzione diventa qui strumento di studio, oggetto di manipolazione, strumento di comprensione e non oggetto finale dell'attività didattica.

Sintesi e conclusioni

Ho cercato di dare un'idea di un ambiente di apprendimento volto all'acquisizione, da parte degli studenti, del concetto di funzione[18]. Gli elementi che compongono questo ambiente sono molteplici e fortemente intrecciati.

Fra gli elementi di carattere metodologico vorrei ricordare il lavoro in piccoli gruppi collaborativi, le discussioni matematiche collettive orchestrate dall'insegnante e l'uso degli strumenti come mediatori semiotici nel prodotto di acquisizione di conoscenza.

Fra gli elementi di carattere concettuale mi sembra che si possa dire che l'ipotesi di lavoro è che un approccio dinamico al concetto di funzione (il recupero della concezione newtoniana) sia particolarmente adatto a una didattica attenta alla costruzione di significati sui quali poter poi fondare, molto gradualmente,

[18] Chi fosse interessato al problema dell'insegnamento di elementi di pre – analisi può consultare il sito http://www.simcalc.umassd.edu/ dove viene presentato il "Simcalc project" portato avanti da un team di ricercatori di varie università americane, fra cui ricordo i nomi di Jim Kaputt, Jeremy Roschelle e Ricardo Nemirovsky. Il principale obiettivo del progetto Simcalc è quello di rendere disponibile a tutti gli studenti della scuola dell'obbligo una piena comprensione e una buona competenza nell'uso dei fondamentali concetti della matematica relativa allo studio di grandezze che variano, mediante l'utilizzazione delle nuove tecnologie e, più in generale, di ambienti di apprendimento adeguati.

l'approccio formale. In particolare, sono convinto che la definizione formale di "pendenza di un segmento", insieme alla percezione che gli studenti possono acquisire, grazie alle attività con i sensori, del concetto di "pendenza locale di un grafico", potrebbero essere considerati, metaforicamente, come semi dai quali potrebbe germogliare il pensiero infinitesimale. Naturalmente, perché ciò accada, è necessario mantenere il terreno fertile, ossia, fuor di metafora, costruire ambienti di insegnamento - apprendimento attenti alla costruzione, sistemazione e comunicazione dei significati degli oggetti di studio e quindi vincolati a un'idea di didattica lunga, dove le osservazioni cliniche delle metafore e dei gesti utilizzati dagli studenti per costruire, sistemare e comunicare conoscenza siano prevalenti e prioritarie rispetto ai tempi stretti, alle cadenze rigide e anche ai miti delle verifiche sommative e "oggettive".
Vorrei concludere con una breve riflessione sulle potenzialità offerte dall'uso delle calcolatrici grafico - simboliche e, più in generale, dei CAS nel processo di acquisizione di concetti matematici come, per esempio, quello di funzione.
Come ho detto al convegno della ADT[19] (Paola, in stampa), le nuove tecnologie mettono a disposizione dell'utente modelli di oggetti matematici sui quali effettuare osservazioni, esplorazioni, esperienze spesso più ricche di quelle consentite dai modelli fisici e, in ogni caso, assai più ricche di quelle permesse dalla didattica del gesso e della lavagna. Come ha anche scritto Maria Alessandra Mariotti (Mariotti, 2001), i moderni sistemi di manipolazione grafico-simbolica e gli ambienti di geometria dinamica portano a rivisitare le relazioni tra astratto e concreto nel processo di costruzione e appropriazione del significato, proprio perché mettono a disposizione dell'utente quelle che, con una sorta di ossimoro, potrebbero essere chiamate "concrete astrazioni".

---

[19] Associazione per la Didattica con le Tecnologie, convegno di Cattolica, Ottobre 2001.

Ovviamente esistono anche rischi dovuti soprattutto a un uso poco consapevole delle nuove tecnologie. Per esempio, l’insegnante dovrebbe essere consapevole che, nel campo educativo, l'uso di ogni tecnologia, in particolare se raffinata e complessa come quella dei CAS, presenta un duplice aspetto: da una parte si ha un oggetto che è stato costruito in base a un sapere specifico, per svolgere determinate funzioni; dall'altra c'è un utente che si appropria dell'uso di questo oggetto. In questa prospettiva, Verillon e Rabardel (Verillon & Rabardel, 1995) distinguono tra artefatto (cioè l'oggetto materiale, con le sue proprie caratteristiche fisiche e strutturali, costruito per usi specifici) e strumento (l'artefatto insieme alle sue modalità di utilizzazione, così come sono viste e interpretate da un utente): l'artefatto diventa uno strumento quando il soggetto riesce ad appropriarsene, utilizzandolo per i propri scopi. Secondo questa definizione, uno strumento è una costruzione soggettiva, che si sviluppa in un processo di lungo termine. Questa prospettiva risulta assai utile per analizzare e interpretare le difficoltà che gli studenti incontrano quando lavorano con un artefatto complesso e raffinato come, per esempio, un CAS: può darsi, infatti, che gli schemi di utilizzazione dell'artefatto messi in opera dagli studenti non siano in accordo con quelli attesi dall'insegnante. Deve però essere chiaro che il docente non può non sentirsi responsabile della situazione: spetta proprio al docente il compito di individuare ambienti di apprendimento e attività che consentano di favorire una *genesi strumentale* adeguata a produrre negli studenti i comportamenti attesi. Come ha scritto Maria Alessandra Mariotti, "i significati sono radicati nell'esperienza fenomenologica (azioni dell'utente e retroazioni dell'ambiente, di cui l'artefatto è un componente), ma la loro evoluzione è acquisita per mezzo di un processo di costruzione sociale in classe, sotto la guida dell'insegnante". Tra l'altro non bisogna dimenticare che i calcolatori sono strumenti in un certo senso *personali* e come tali possono portare a un'individualizzazione del lavoro matematico in classe. In questo contesto l'insegnante ha la responsabilità di promuovere e sostenere processi di socializzazione, anche insistendo su approcci di tipo cooperativo o collaborativo, in modo tale che ogni allievo si senta coinvolto nel processo di produzione di un lavoro.

Bibliografia

Arzarello, F. , Robutti, O.: 2001, From body motion to algebra through graphing, *ICMI Studies* 2001

Bartolini Bussi, M.G, Boni M. & Ferri, F: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Comune di Modena.

Bazzini, L, Ferrara, F., Fossati, F. & Robutti, O.: (in stampa) Embodiment and technology in modeling activities, CIEAEM 54, Vilanova i La Geltrù.

Berthoz, A.: 1998, *Il senso del movimento*, Mc – Graw Hill, Milano.

Furinghetti, F., Olivero, F. & Paola, D.: 2000, Watching Video-Recorded Sessions as a Support in the Construction of a Shared Classroom Culture, CIEAEM 51, 369 – 376.

Lakhoff, G. & Nunez, R.: 2000, Where Mathematics Comes From, Basic Books, New York.

Kline, M., 1991, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino.

Mariotti, M.A.: 2001, Influence of technologies advances on students' math learning, in English, L., Bartolini Bussi, M.G., Jones, G., Lesh, R. & Tirosh, D. (eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erbaum Associates.

Ferrara, F. & Robutti, O.: 2002, A graphical approach to functions through body motion, In L. Bazzini & C. Whybrow Inchley (editors) *Mathematical Literacy in the digital era*, Proceedings of CIEAEM 53, 321 – 326.

Nucleo di Ricerca Didattica di Modena: 1985, *Il concetto di funzione nella scuola superiore*, Dipartimento di Matematica di Modena, CNR.

Nunez, R.; Edwards, L. & Matos, J.F.: 1999, 'Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education', *Educational Studies in Mathematics,* 39, 45-65.
Nunez, R.: 2000, 'Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science Can Say about the Human Nature of Mathematics', *Proceedings of PME-XXIV,* Hiroshima, vol. I, pp. 3-21.
Paola, D. : 2001, Nuove tecnologie e nuova scuola, in *Didattica della matematica e Rinnovamento curricolare,* (a cura di B. D'Amore), atti del convegno di Castel San Pietro Terme, 81 – 93.
Paola, D.: 2002, Cinematica e nuove tecnologie, *Didattica delle Scienze*, n. 218, 41 – 46.
Paola, D. (in stampa) Le tecnologie nella riforma dei cicli, nella ricerca e nella prassi didattica. Nuove prospettive e antichi pregiudizi, Atti convegno ADT, Cattolica, 2001.
Rossi, P. (a cura di): 1969, *Il pensiero di Galileo*, Loescher, Torino.
Tall, D.: 2000, Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics*, Chiang Mai, Thailand (pp. 3–20). ATCM Inc, Blackwood VA. ISBN 974-657-362-4.
Tall, D.: 2002, Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics, *First Coloquio do Historia e Tecnologia no Ensino de Matematica at Universidade do Estado do Rio De Janiero.*
Verillon, P. & Rabardel, P.: 1995, Cognition and Artifacts: a Contribution to the Study of Tought in Relation to Intrumented Activity, *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), 77-101.